Taller de Ecuaciones Funcionales en Fases Locales de la OME. 15 de enero de 2021

Basado en http://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2016/EcuacionesFuncionales.pdf

(Luis Castro Castro. "Estudio de problemas sobre ecuaciones funcionales en el nivel de Olimpiadas Matemáticas". TFM Universidad de Granada. 2016).

Para ampliar conceptos de teoría de conjuntos y aplicaciones, podéis recurrir a las notas de la asignatura Álgebra Básica: http://blogs.algebra.us.es/algbas/?page_id=562

Definición.
Una *aplicación* o *función* $f: X \to Y$ es una regla que asocia a cada elemento *x* del conjunto *X* un único elemento *y* del conjunto *Y*. Normalmente escribimos *y* = *f* (*x*).

Definición.
Una función, $f: X \to Y$, se dice que es *inyectiva* si verifica alguna de estas dos condiciones equivalentes:
(a) Si *a* y *b* son elementos de *X* tales que *f* (*a*) = *f* (*b*), entonces necesariamente *a* = *b*.
(b) Si *a* y *b* son elementos diferentes de *X*, necesariamente se cumple que *f* (*a*) ≠ *f* (*b*).

Definición.
Una función, $f: X \to Y$, se dice que es *sobreyectiva* si cada elemento de *Y* es la imagen de como mínimo un elemento de *X*, es decir, para todo *y* en *Y* existe *x* en *X* tal que *f* (*x*) = *y*.
Las aplicaciones que son inyectivas y sobreyectivas se llaman biyectivas (o biunívocas).

Ejemplos: Deducir cuáles de las siguientes son funciones y cuáles no. En su caso, cuáles son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

1. Sea X=conjunto de españoles, Y=conjunto de números naturales. f= la regla que asocia a cada español su número de DNI
2. Sea X un conjunto cualquiera, la aplicación **identidad** f: X→X que asocia a cada elemento x de X, f(x)=x.
3. Sean X, Y conjuntos, k un elemento de Y fijo. La aplicación constante es la que asigna a cada x de X el mismo k de Y.
4. Sean X e Y el conjunto de los números naturales. $f(n)=n^2$, para cada número n natural.
5. Sean X=Y= conjunto de los números reales. $f(x)= x^2-2x+1$ para cada número real x.
6. Sean X=Y= conjunto de los números reales. f(x)= (x+1)/x para cada número real x.
7. Sean X=Y= conjunto de los números racionales positivos. f(x)=$\sqrt{x}$.
8. Sean X=Y= conjunto de los números reales positivos. f(x)=$\sqrt{x}$.
9. Sean X=Y=conjunto de los números enteros. f(n)=2n, para cada número entero n.
10. Sea f: Z → Z la aplicación definida por

$$f(n) = \left\{\begin{matrix} n, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{matrix}\right\}.$$

Las ecuaciones donde las incógnitas son funciones reciben el nombre de *ecuaciones funcionales*.

Ejemplos de ecuaciones funcionales:
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Ecuación de Cauchy).
$f(x\,y) = f(x) + f(y)$.
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$.
$f(x^2) = 2f(x)$.
$f(f(x)) = x$.
$f(x^2) + f(x) = \text{sen } x$.

Ejemplo: Hallar todas las funciones $f(x)$ reales (de R en R) tales que $3f(2-x) + 2f(x) = x^2$, donde x está en R.
Idea: sustituir x por 2-x en la ecuación. Solución $f(x)=(x^2-12x+12)/5$.
Ejemplo. Resolver la ecuación funcional $x^2 - 2f(x) = f(1/x)$ donde f es una aplicación de R\{0} en R.
Idea: sustituir x por 1/x
Ejemplo: Calcular todas las funciones inyectivas $f: R \to R$ tales que
$f(x + f(y)) = f(y + f(x))$, para todo x,y en R.
Solución: f(x)=x+k, con k=f(0).
Ejemplo Encontremos todas las funciones f: Q --> Q tales que f(x + y) = f(x) + f(y)
Con x= y = 0 deducimos que f(0) = 0. Ahora, si sustituimos y = -x; tenemos que f(x) = -f(-x), y por tanto nos bastará resolverla en los racionales positivos y quedará completamente definida.
Comprobar por inducción que f(nx) = nf(x) para todo n natural y x racional.
Comprobando que f(1/q) = f(1) / f(q) para todo número natural q, resta probar que la función f es f(x)=ax, con a=f(1). Se debe comprobar que estas funciones verifican la ecuación funcional del enunciado.

Problema 2000 (fase nacional). Demuestra que no existe ninguna función f : N →N que cumpla: f(f(n)) =n + 1.
Demuestra que, con esa condición, f sería inyectiva. Sea f(1)=a>1, entonces se prueba por inducción que f(a+n)=n+2, para todo n mayor o igual que 0. Entonces f(2a - 2) =a=f(1), contradicción.

Problema 2001. Consideramos el conjunto $\boldsymbol{N}$ = {l, 2,3,...} de los números naturales y la aplicación $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ que cumple las dos siguientes condiciones:

a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$.

b) $f(f(n)+1) = \begin{cases} n-1, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n+3, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Determina el valor de $f(n)$ para cada $n \in \boldsymbol{N}$ observando previamente que f es biyectiva y que, al no ser nunca $f(f(n)+1) = 2$, tiene que ser $f(1) = 2$.

Solución:
Por la condición a), es obvio que f es biyectiva. Y, como por la condición b) se observa que nunca es $f(f(n)+1) = 2$, forzosamente tendrá que ser 2 la imagen del único elemento que no es de la forma $f(n) + 1$, o sea de 1: $f(1) = 2$. Y de nuevo por a), $f(2) = 1$.

Vamos a probar, por inducción sobre n, que

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Para n = 1 y para n = 2 ya está visto. Supongamos n > 2.

Por hipótesis de inducción, se tiene

$$f(n-1)=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ n-2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y también

$$f(n-2)=\begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora,

$$f(n)=\begin{cases} f\left(f\left(n-2\right)+1\right), & \text{si } n \text{ es impar} \\ f\left(f\left(n-1\right)\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} n-2+3=n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Problema 2005. Encontrar todas las funciones f : R→R que verifican
$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$.

Idea: cambiar x por 1-x

Problema 2015. Encuentra todas las aplicaciones f : Z →Z que verifican f(n) + f(n + 1) = 2n + 1
para cualquier entero n y además

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$$

Idea: compruébese por inducción que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$ para cada entero n.

La segunda condición permite calcular f(0)= 1, con lo que la única función que satisface las condiciones de enunciado es $f(n) = n + (-1)^n$

Problema 2004. Encontrad todas las funciones f : N→N tales que $f(f(n)) = n + 2$ para todo número natural n.
Idea: demostrar que:
-f(2k+1) = f(1)+2k y f(2k)=f(2)+2k
-deducir que f(1) es par y f(2) impar y f(1)+f(2)=5, seguir con la casuística.

Problema 2000. Se consideran las funciones reales de variable real f(x) de la forma: f(x) = ax + b, siendo a y b números reales.
¿Para qué valores de a y b se verifica $f^{2000}(x) = x$ para todo número real x.

[Nota: Se define $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, y en general,
$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(...f(x))...))$ n veces]

Solución: si $f(x) = ax + b$ entonces $f^{2000}(x)$ será una función del tipo $a^{2000} x + c$, donde c depende de a y b. Por tanto, tenemos que ver para qué valores de a y c
$f^{2000}(x) = x$. De esta forma obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:
$a^{2000} = 1$.
$c = 0$.
De aquí se deduce que $a = 1$ ó $a = -1$. Analicemos los dos casos por separado:
Si $a = 1$ entonces $f(x) = x + b$, y
$f^2(x) = f(f(x)) = f(x + b) = x + 2b$.
$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 2b) = x + 3b$. ...
$f^{2000}x = x + 2000b$.
En este caso la única solución es $f(x) = x$.
Si $a = -1$ entonces $f(x) = -x + b$ y se tiene que:
$f^2(x) = f(f(x)) = f(-x + b) = -(-x + b) + b = x$.
$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x + b$.
$f^4(x) = f(f^3(x)) = f(-x + b) = x$.
...
Por lo que todas las funciones f(x)=-x+b son solución.

Problema 2009. Determinar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ que verifican:
(I) $f(0) = 2$.
(II) $f(n) + f(f(n)) = 2n + 6$, para todo n en N.

SOLUCIÓN. Para hallar todas las funciones que verifican esta condición vamos a ver, en primer lugarel comportamiento de la función tanto en los números pares como impares. En efecto: Si $n = 0$ por las hipótesis (i) y (ii) se tiene que $f(2) = 4$. En general podemos afirmar que la expresión de la función en los pares es $f(2t) = 2t + 2$. En efecto, probémoslo por inducción:
Si $t = 0$ el resultado es cierto, supongamos la igualdad cierta para n y demostrémosla para
$t = n + 1$. La hipótesis de inducción nos dice que $f(2n) = 2(n + 1)$ por tanto aplicando la condición ii) tenemos que $f(2t)+ f(f(2t)) = 2(2t)+6)$, o lo que es lo mismo $2(t+1)+ f(2t+1) = 4t+6$, es decir:
$f(2t + 1) = 2(t + 1) + 2$
Por tanto la igualdad es cierta y se tiene que $f(2t) = 2t+2$. Veamos qué ocurre en los impares:
Si n es impar, entonces n es de la forma $n = 2t+1$. Tenemos, trivialmente, la siguiente cadena
de desigualdades: $2t < 2t + 1 < 2t + 2$. Como f es estrictamente creciente entonces $f(2t) <$

$f(2t+1) < f(2t+2)$. Y por lo anterior tenemos $2+2 < f(2t+1) < 2(t+1)+2 = 2t+2+2 = 2t+4$ luego $f(2t+1) = 2t+3 = (2t+2)+1 = (2t+1)+2$. Tenemos por tanto que:
$f(2t) = 2t + 2$.
$f(2t+1) = (2t+1) + 2$.

Problema 1998 (fase nacional)
Hallar todas las funciones $\mathbf{f:N \to N}$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2\, f(n)$$

para n = 1, 2, 3, ...

Solución:

Supongamos f(1) = b. Entonces, f(1 + b) = 2b, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1+1) < \ldots < f(1+b) = 2b = b + b.$$

y resulta que f(1), f(2),….f(1+ b) son b + 1 naturales, distintos, el primero vale b y el último 2b, por tanto han de ser consecutivos.

resulta entonces:

$$f(1) = b,\ f(2) = 1 + b,\ f(3) = 2 + b, \ldots,\ f(1 + b) = b + b.$$

En general, para n > 1, si f(n) = c , f(n + c) = 2c = c + c y resulta que:

c = f(n) < f(n + 1) <….< f(n + c) = c + c y los números f(n), f(n + 1), ….., f(n + c) son consecutivos.

Así pues,

$$f(n) = n + k$$